Subject: [illegible] 2018 / 5 / 15

النوع الثالث:

لتكن z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة $f(z)$ نقول عن نقطة شاذة أساسية للدالة f إذا وفقط إذا كانت النهاية غير موجودة.

$\lim_{z \to z_0} f(z)$ غير موجودة.

$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ ← z_0 قابلة للإزالة

$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ← z_0 قطب إذا كانت

ولا يكفي نقول قطب بل تحدد رتبته.

مثال:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

* هذه الدالة غير معرفة وغير مستمرة وبالتالي هي نقطة شاذة.

مجموعة تعريف الدالة الأسية هي مجموعة تعريف الأس. $\frac{1}{z}$; $z \neq 0$

* لنا هنا أن z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة المعطاة.

لنجعل z تسعى نحو الصفر على المحور الأفقي أي أن $z = x$

وبالتالي فإن $\lim e^{\frac{1}{z}} = \lim e^{\frac{1}{x}} =$ [illegible]

$e^{-\frac{1}{x}} = 0$ ، $z \to 0$ ، $x > 0$ [illegible]

أما يسارية $\lim e^{\frac{1}{z}} = \lim e^{\frac{1}{x}} = 0$

$z \to 0$, $x < 0$

المسار الأول $z = x(1+i)$ المسار الأول.

وبما أن قيمة النهاية اختلفت باختلاف الطريق عندئذ هذا يعني أن $z = 0$ هي نقطة شاذة أساسية.

* العلاقة بين النقطة الشاذة ومنشور لورانت للدالة f في جوار مأخوذ عند هذه النقطة.

Subject: $e^{i 2\pi} = 1$

فيلم هذا بأن متسلسلات للدالة f في جوار $0<|z-z_0|<\delta$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \quad 0<|z-z_0|<\delta$$

تسمى بالجزء الرئيسي للمتسلسلات — تسمى بالجزء التحليلي للمتسلسلات

مبرهنة:

لتكن z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة $f(z)$
الشرط اللازم والكافي لكي تكون z_0 نقطة شاذة قابلة للإصلاح
للإصلاح هو أن يكون للدالة f في الجوار $0<|z-z_0|<\delta$ نشر
الآتي:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

البرهان:

لنفرض أن C_2 دائرة نصف قطرها r صغير بقدر كاف
ولتكن C_1 ... r_1 حيث أن $0<r<r_1<\delta$
وتصبح الدالة تحليلية على C_1, C_2 وفي جميع نقاط النطاق الحلقي.
عندئذ يكون للدالة f عند كل نقطة من نقاط هذا النطاق التمثيل الآتي
$0<|z-z_0|<\delta$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

ملاحظة

عندما تكون z_0 قابلة للإصلاح تكون الجزء التحليلي موجود
والجزء الرئيسي $b_n=0$

FUTURE

Notebook

Subject: ______ / /

العكس: لنفرض أن الدالة f الشكل الآتي:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad 0<|z-z_0|<\delta$$

z_0 نقطة شاذة قابلة للإزالة

ملاحظة: وفي حال كان لدينا الشكل موجود، لأن a_0 موجودة والباقي كلا أصفار، فإن لا تكون أيضاً z_0 قابلة للإزالة.

مثال:

$$f(z) = \frac{2(e^z-1-z)}{z^2}$$

أولاً: نلاحظ بأن z_0 نقطة شاذة للدالة لأن الدالة غير معرفة وبالتالي غير مستمرة وبالتالي غير قابلة للاشتقاق.

الآن سنبين نوع: أما عن طريق الشكل فنكون ذات حدود سالبة = 0.

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots + \frac{1}{n!}z^n + \dots$$

$$e^z - 1 - z = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots + \frac{1}{n!}z^n + \dots$$

$$2(e^z-1-z) = z^2 + \frac{2}{3!}z^3 + \frac{2}{4!}z^4 + \dots \frac{2}{n!}z^n + \dots$$

$$f(z) = \frac{2(e^z-1-z)}{z^2} = 1 + \frac{2}{3!}z + \frac{2}{4!}z^2 + \dots \frac{2}{n!}z^{n+2} + \dots$$

ملاحظة: اذا كانت النقطة الشاذة z_0 قابلة للإزالة للدالة f

$f(0) = 1$ كملت بدالة كلية

FUTURE Notebook

عرف الدالة f عند z_0 لتصبح دالة تحليلية. ١- نوجد المنشور
٢- نضع $f(z)$ ونضربها بالمنشور
نأخذ أول الحد a_0 ثابت يساوي z

Subject:

شرط يكون $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$

مهما يكن $0 < |z - z_0| < \delta$ فيستنتج أن $||z_1| - |z_2|| < |z_1 - z_2|$

أي أن الدالة محدودة في جوار محذوف عن نقطة الشاذة قابلة للإصلاح

أي:

ملاحظة 2: إذا وضعنا $f(z_0) = a_0$ تصبح الدالة f معرفة ومستمرة وتحليلية عند النقطة z_0 أي تم إزالة الشذوذ عن هذه النقطة. ((إذا وضعنا z_0 = قيمة النهاية تلتغي نقطة شاذة وتكون دالة تحليلية.

مثال (2) لتكن لدينا الدالة $f(z) = \frac{ch z - 1}{z^2}$ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

أما عرف الدالة f لتكون تحليلية عند $f(z_0)$

أي: أوجد منشور الدالة.

$$ch z = 1 + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!} z^{2n} + \cdots$$
$|z| < \infty$

$$ch z - 1 = \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!} z^{2n} + \cdots$$
$|z| < \infty$

$$\frac{ch z - 1}{z^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} z^2 + \cdots + \frac{1}{(2n)!} z^{2n-2} + \cdots$$
$0 < |z| < \infty$

نستنتج أن $z = 0$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح لأن الجزء الرئيسي منشور لورانت معدوم.

إعادة تعريف الدالة

$$f(z) = \begin{cases} \frac{ch z - 1}{z^2} & ; z \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{لما } z = 0 \end{cases}$$

FUTURE Notebook

Subject: فئة المقابلة الإهمال / تصنيف نقاط الشذوذ   / /

ملاحظة (3) يمكن صياغة تعريف آخر للنقطة الشاذة المقابلة للإهمال
تكون النقطة الشاذة المعزولة نقطة " " إذا وفقط
إذا كان الجزء الرئيسي للمتسلسلة معدوم.

العلاقة بين الأقطاب والمتسلسلة

مبرهنة لتكن z_0 نقطة شاذة المعزولة للدالة f إن الشرط اللازم
والكافي لكي تكون النقطة z_0 قطب من الرتبة m هو أن يكون للدالة
f متسلسلة لورنت الآتي في الجوار $0 < |z - z_0| < \delta$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

$b_m \neq 0$

نقول عن نقطة أنها قطب إذا كان الجزء الرئيسي له عدد محدود.
من الرتبة أعلى حد أي m

ملاحظة: من المبرهنة السابقة نستنتج بأن النقطة z_0 تكون قطب إذا وفقط
إذا كان الجزء الرئيسي يتكون من عدد محدود من الحدود،
أي أن أعلى رتبة من هذه الحدود هو رتبته.
ودرجة أعلى حد من الحدود ذات القوى السالبة هي رتبة هذا القطب.
وبالتالي لا يمكن إصلاح الدالة.
عندما تكون z_0 قطب لا تستمر هذه الدالة عند أي نقطة منه.

ملاحظة إذا كانت z_0 قطباً فإن $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

Subject: .... / /

فإن عند أي $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$|f(z)| > \frac{1}{\epsilon}$ طالما $0 < |z - z_0| < \delta$ باستمرار

نستنتج أن f لا تنعدم عند أي نقطة في تلك الجوار $f(z) \neq 0$

ملاحظة

استفادة للمبرهنة السابقة يكون للدالة f نشر

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

أي أن

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \Big[c_0 + c_1 (z - z_0) + \dots + c_{m} (z - z_0)^{m-1}$$

$$+ a_0 (z - z_0)^m + a_1 (z - z_0)^{m+1} + \dots$$

أي أن $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \varphi(z)$

بالإضافة للعلاقة السابقة نستنتج من هذه العلاقة فإن نستنتج

$\varphi(z) = 0$ أيضاً لا تنعدم عند النقطة في تمام جوار z_0 $0 < |z - z_0| < \delta$

ملاحظة: إذا كانت z_0 قطب للدالة f من رتبة m عندئذ

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \varphi(z) \qquad \varphi(z) \neq 0$$

مبرهنة: لتكن z_0 نقطة شاذة معزولة للدالة f

الشرط اللازم والكافي لكي تكون z_0 نقطة شاذة أساسية هو أن يحوي للدالة f النشر الآتي:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Subject: ________ / /

من هذه المبرهنة نستنتج ان z_0 تكون نقطة شاذة أساسية اذا وفقط اذا كان الجزء الرئيسي يتكون من عدد غير محدود.

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \dots$$

نلاحظ ان الجزء الرئيسي يتكون من عدد غير منتهي من الحدود مما يعني أن نقطة $z=0$ نقطة شاذة أساسية.

مثال: أوجد منشور الدالة $f(z) = \frac{z+2}{z(z-1)}$

في النطاق $0 < |z-1| < 1$

نجد منشور المتسلسلة $(z-1)$ على شكل قوى

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\left(\frac{z+2}{z}\right) = \frac{1}{(z-1)}\left(1 + \frac{2}{z}\right)$$

$$= \frac{1}{z-1}\left(1 + 2\frac{1}{1+z-1}\right) = \frac{1}{z-1}\left(1 + 2(1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots + (-1)^n(z-1)^n\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\left[3 - 2(z-1) + 2(z-1)^2 - 2(z-1)^3 - 2(z-1)^3 + \dots + 2(-1)^n(z-1)^n \dots\right]$$

$$f(z) = \frac{3}{z-1} - 2 + 2(z-1) - 2(z-1)^3 + 2(-1)^n(z-1)^{n-1} + \dots$$

بما ان الجزء الرئيسي يتكون من عدد محدود من الحدود (حد واحد)

عندئذٍ $z=1$ قطب بسيط.

قطب بسيط $(z-1)^1$

Subject: / /

z ...

$f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$ $0 < |z| < ...$

$f(z) = \frac{z+2}{z(z-1)^2}$ أوجد منشور الدالة $f(z)$

$0 < |z-1| < 1$

نجمع بحدود النشر $(z-1)$

$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\left[1 + \frac{2}{z}\right]$ الآن نجمع بحدود $(z-1)$ نجمع ونطرح 1

$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\left[1 + 2\frac{1}{1+z-1}\right]$

$= \frac{1}{(z-1)^2}\left[1 + 2(1-(z-1)+(z-1)^2 + ___ + (-1)^n(z-1)^n + __\right]$

$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\left[3 - 2(z-1) + 2(z-1)^2 + __ + 2(-1)^n(z-1)^n + __\right]$

$f(z) = \boxed{\frac{3}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)}} + 2 - 2(z-1) + 2(z-1)^2 + __$

نستنتج بأن $z=1$ قطب لأن عدد حدود الجزء الرئيسي منتهٍ وتساوي (2) وهو من الرتبة الثانية لأن $b_2 = 3 \neq 0$

FUTURE Notebook

Subject: .... / /

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^5} \qquad 0 < |z|$$

أوجد المتسلسلة

حدد نوع النقطة $z=0$

$$f(z) = \frac{1}{z^5}\left[z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \frac{1}{9!}z^9 + \dots (-1)^n z \right.$$

$$f(z) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}z^2 + \dots$$

وبالتالي نلاحظ أن $z=0$ نقطة قطب من الرتبة الرابعة لأن عدد الحدود الجزء الرئيسي محدود وأعلى أس في هذه الحدود = 4.

العلاقة بين الأصفار والأقطاب

إذا كان z_0 صفر من الرتبة m للدالة $f(z)$ عندئذ يكون z_0 قطب من الرتبة m للدالة $\frac{1}{f(z)}$

$f(z) = z(z-1)$

$z=0$, $z=1$ الأصفار هي

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m g(z)}$$

نهتم بـ $z=1$ لأن ... (1) ومن الرتبة الأولى وبالتالي من رتبة الأولى $\frac{1}{z(z-1)}$

نستنتج أن $z=z_0$ قطب من رتبة m

$h(z) = z(z-1)^2$

$z=1$ قطب من رتبة الثانية بالنسبة

$z=0$ " " الأولى

FUTURE

Notebook

Subject: / /

برهنة العكس: اذا كانت z_0 قطب للدالة f من الرتبة l عندئذ يكون z_0 صفر من الدرجة l للدالة $\frac{1}{f(z)}$

الإثبات:

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^{l} \frac{1}{\varphi(z)}$$

وهذا يعني أن $z=z_0$ صفر من الدرجة l

ملاحظة: اذا كانت z_0 تعدم المقام والبسط نأخذ لوبيتال المرتبة مثال $\frac{\sin z}{-z^9} = \frac{0}{0}$ فيجب 4، 5

ملاحظة: إذا كانت الدالة $f(z)$ من الشكل $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$

" " z_0 صفر للبسط من الدرجة n
" " z_0 " للمقام " " m) عندئذ $m > n$ تكون z_0 قطب للدالة f من الدرجة أو رتبة $(m-n)$

أما اذا كان $m \leq n$ عندئذ تكون z_0 نقطة شاذة قابلة للإصلاح.

مثال *

لتكن لدينا الدالة $f(z) = \frac{z^3 - z^2}{e^z - 1 - z}$

ندرس النقطة $z=0$ للدالة f

نلاحظ أن $z=0$ صفر للبسط من الدرجة الثانية لأن $g(0)=0 \wedge g'(0)=0, g''(0) \neq 0$

بالنسبة للمقام $h(z) = e^z - 1 - z$

$h'(0) = 1 - 1 - 0 = 0$

$h''(0) = e^z = 1 \neq 0$

أيضاً $z=0$ صفر للمقام من الدرجة الثانية وبما أن $z=0$ صفر للبسط من رتبة ثانية

$z=0$ " للمقام " " "

FUTURE
Notebook

نستنتج أن $z=0$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة .

مبرهنة إذا كان z_0 قطب للدالة $f(z)$ عندئذ يكون z_0 نقطة شاذة أساسية للدالة $\varphi(z)=e^{f(z)}$

مثال عين النقاط الشاذة للدالة $f(z)=\frac{1}{z+2}e^{\frac{1}{z+i}}$

النقاط الشاذة هي $z=-2$ ، $z=-i$

وذلك لأن $z=-2$ هي قطب بسيط من الرتبة الأولى

وذلك لأن $z=-2$ صفر من الرتبة الأولى للدالة $h(z)=z+2$

وبالتالي هي قطب للدالة $\frac{1}{h(z)}=\frac{1}{z+2}$

مما يعني بأن $z=-2$ هي قطب للدالة $f(z)=\frac{1}{z+2}e^{\frac{1}{z+i}}$

$z=-i$ قطب بسيط للدالة $\frac{1}{z+i}$ (لأنها صفر من الدرجة الأولى $(g(z)=z+i)$

وبالتالي استنادا للمبرهنة فإن $z=-i$ تكون نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)=\frac{1}{z+2}e^{\frac{1}{z+i}}$